

## 2. LE SYSTÈME « PER UNIT »

# Table des matières

|           |   |          |
|-----------|---|----------|
| <b>2.</b> | <b>LE SYSTÈME « PER UNIT »</b> .....                  | <b>1</b> |
| 2.1.      | Introduction .....                                    | 3        |
| 2.1.1.    | Le schéma unifilaire .....                            | 3        |
| 2.1.2.    | Puissance, tension et courant de base .....           | 4        |
| 2.1.3.    | Impédance et admittance de base .....                 | 6        |
| 2.1.4.    | Chute de tension .....                                | 7        |
| 2.1.5.    | Changement de base .....                              | 7        |
| 2.2.      | Modélisation des lignes .....                         | 8        |
| 2.3.      | Modélisation des transformateurs .....                | 9        |
| 2.3.1.    | Le transfo. idéal dans les calculs de réseau .....    | 10       |
| 2.3.2.    | Insertion d'un transfo dans un système per unit ..... | 11       |
| 2.3.3.    | Schéma équivalent.....                                | 12       |
| 2.4.      | Modélisation des machines synchrones .....            | 12       |
| 2.5.      | Exercice résolu .....                                 | 14       |
| 2.5.1.    | Enoncé.....   | 14       |
| 2.5.2.    | Résolution de l'Exercice pu.....                      | 14       |
| A.        | Données :.....  | 14       |
| B.        | Choix des grandeurs de base :.....                    | 15       |
| C.        | Schéma unifilaire : .....                             | 15       |
| D.        | Grandeurs en pu et schéma en pu :.....                | 15       |
| E.        | Etat du système : .....                               | 16       |
| F.        | puissances transmises en chaque nœud :.....           | 17       |
| G.        | Puissances dissipées : .....                          | 17       |
| H.        | Bilan de puissances : .....                           | 18       |

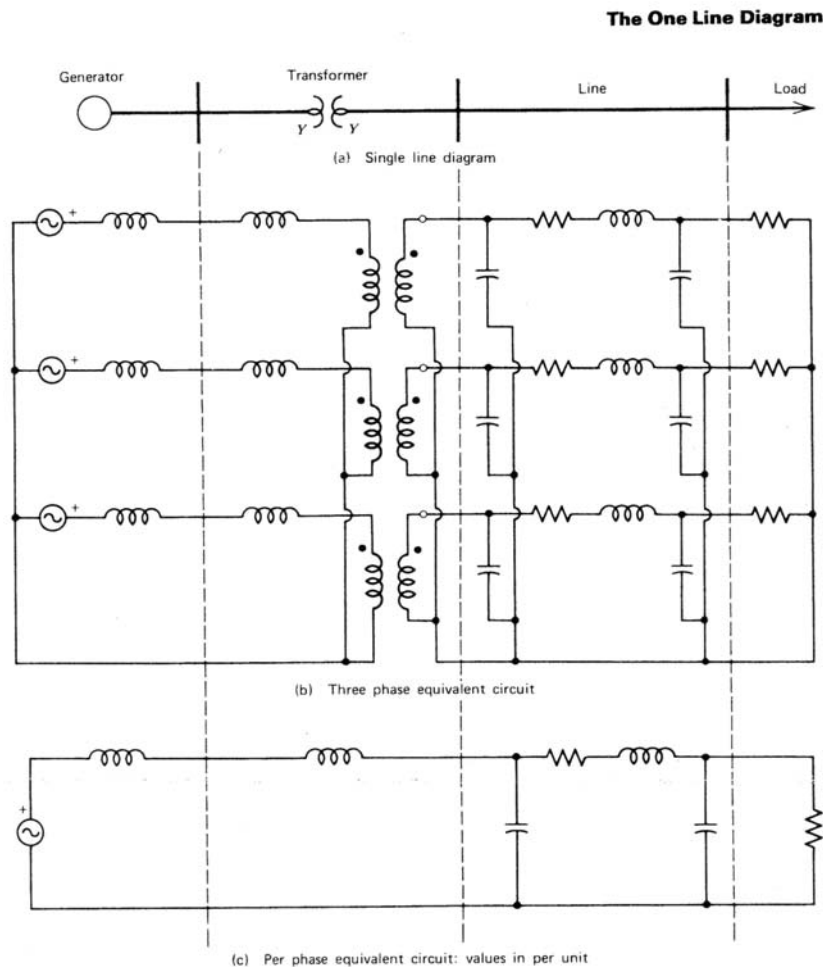
## 2.1. Introduction

Le système « Per Unit » est un système de grandeurs réduites qui permet à l'ingénieur électricien d'avoir constamment à l'esprit des ordres de grandeurs relatifs de certains paramètres indépendamment des niveaux de tension et de puissance. De plus, l'utilisation de ce système simplifie certaines formules et schémas équivalents. En particulier, un bon choix initial permet de s'affranchir de la présence des transformateurs idéaux et la formulation se ramène à l'étude de circuits monophasés.

Ce système associe, à une variable quelconque «  $\alpha$  », une valeur de base «  $\alpha_{base}$  » et la compare à sa valeur 'vraie' «  $\alpha_{vraie}$  » de manière à l'exprimer dans un système adimensionnel « pu » (ou en % de sa valeur de base) dont les ordres de grandeur sont bien connus.

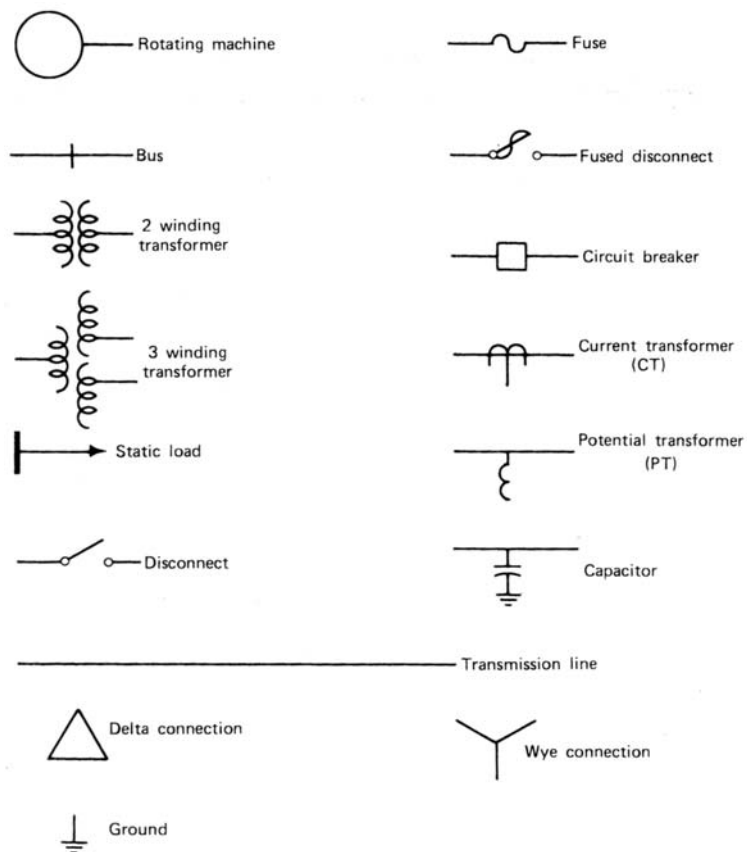
### 2.1.1. Le schéma unifilaire

Pour représenter les circuits rapidement et simplement, nous aurons recours à un schéma unifilaire (one line diagram). La figure 2.1 montre les équivalences avec d'autres schématisations et prouve bien l'avantage d'une telle représentation.



**Figure 2.1 : Schéma unifilaire d'un système triphasé**

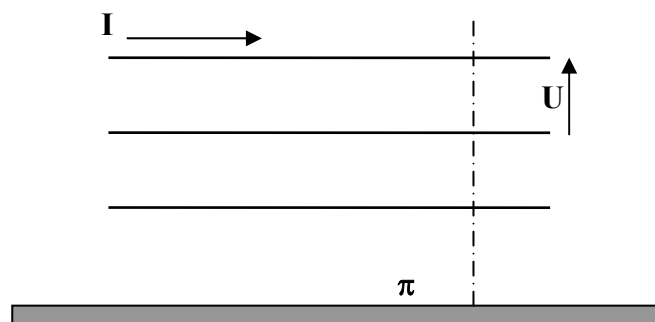
La figure 2.2 montre les différents symboles couramment utilisés pour représenter les éléments à partir d'un schéma unifilaire.



**Figure 2.2 : Symboles des schémas unifilaires**

### 2.1.2. Puissance, tension et courant de base

Considérons un système d'alimentation triphasé tel que représenté sur la Figure 2.3.



**Figure 2.3 : Ligne triphasée, tension entre phases et courant de ligne**

A ce réseau sont associées les quatre variables complexes suivantes :  $U$ , tension entre phases ;  $I$ , courant de phase ;  $S$ , puissance complexe et  $Z (=1/Y)$ , impédance du circuit.

Dans un système triphasé équilibré, l'amplitude (module) de la tension entre phases et celle la tension entre une phase (quelconque) et le point neutre sont liées entre-elles par la relation 2.1.

$$U = \sqrt{3} \cdot V \quad [V] \quad (2.1)$$

La puissance complexe traversant la section  $\pi$  est donnée par :

$$\bar{S} = 3 \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \sqrt{3} \cdot \bar{U} \cdot \bar{I}^* = P + j \cdot Q \quad [VA] \quad (2.2)$$

Elle se décompose en - puissance active = P [Watt]  
- puissance réactive = Q [Var]

La **puissance apparente**,  $|\bar{S}|$ , s'exprime en Volts-Ampères ; le déphasage entre  $\bar{V}$  et  $\bar{I}$  est représenté par l'angle ' $\varphi$ ' dont le cosinus est appelé « **facteur de puissance** ».

La tension ( $\varphi$ -N) et le courant sont liés entre eux par la loi d'Ohm :

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (2.3)$$

Nous définissons le système de grandeurs réduites « **Per Unit** » de la manière suivante :

$$\bar{S}_{pu} = \frac{\bar{S}}{S_B} ; \bar{U}_{pu} = \frac{\bar{U}}{U_B} ; \bar{I}_{pu} = \frac{\bar{I}}{I_B} \text{ et } \bar{Z}_{pu} = \frac{\bar{Z}}{Z_B} \quad (2.4)$$

$$U_B = \sqrt{3} \cdot V_B \quad [V] \quad (2.5)$$

$$S_B = \sqrt{3} \cdot U_B \cdot I_B \quad [VA] \quad (2.6)$$

$$V_B = Z_B \cdot I_B \quad (2.7)$$

Les grandeurs de base, indicées 'B', choisies judicieusement, permettent de simplifier considérablement les calculs dans les réseaux d'énergie électrique. Dans le système de base, la puissance se conserve et la loi d'Ohm reste également d'application. L'existence de ces deux relations (cfr. 2.2 et 2.3) nous enseigne que seules deux parmi les quatre variables citées précédemment sont indépendantes. Nous disposons donc de deux degrés de liberté pour le choix des grandeurs de base. Ainsi, nous choisirons 'SB' pour ses propriétés de 'conservativité' et 'V<sub>B</sub>' pour son accessibilité (plus directe que courant et impédance par la normalisation des niveaux de tension pour le transport). Nous choisirons souvent les valeurs nominales du réseau pour la tension.

Dès lors, si nous choisissons une puissance de base 'SB' et une tension de base 'UB', nous définissons implicitement le courant de base (définition de la puissance) ainsi que l'impédance de base (introduite via la loi d'Ohm), donné par :

En divisant membre à membre les équations (2.1) et (2.5), nous obtenons :

$$U_{pu} = V_{pu} \quad [pu] \quad (2.8)$$

**Premier avantage** : Lors de la résolution d'un problème à partir d'un schéma unifilaire équivalent, nous n'avons plus besoin de nous poser la question de savoir s'il s'agit de la tension entre phases ou entre phases et neutre car les valeurs sont identiques !

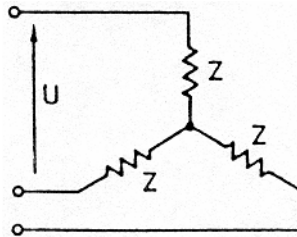
En divisant membre à membre les équations (2.2) et (2.6), nous obtenons :

$$\bar{S}_{pu} = \bar{U}_{pu} \cdot \bar{I}_{pu}^* \quad [pu] \quad (2.9)$$

**Second avantage** : Suppression du coefficient «  $\sqrt{3}$  » dans l'expression de la puissance complexe.

Le système Per Unit conserve la loi d'Ohm et les lois de Kirchoff. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces dernières remarques.

### 2.1.3. Impédance et admittance de base



**Figure 2.4 : Charge (équilibrée) triphasée en étoile**

Considérons une charge triphasée étoilée symétrique telle que représentée sur la figure 2.4. La puissance complexe absorbée par ces charges peut s'exprimer en fonction de la tension entre phases (son module !) et l'impédance complexe (son conjugué !) :

$$\bar{S} = 3 \frac{\bar{V} \cdot \bar{V}^*}{\bar{Z}} = 3 \frac{(V)^2}{\bar{Z}} = \frac{U^2}{\bar{Z}} \quad [\text{VA}] \quad (2.10)$$

Dans le système lié aux grandeurs de base (qui sont, de préférence, réelles !), nous avons :

$$S_B = \frac{U_B^2}{Z_B} \quad (2.11)$$

$$Z_B = \frac{U_B^2}{S_B} \quad [\Omega] \quad (2.12)$$

La puissance complexe en pu devient, en fonction de l'impédance 'Z<sub>pu</sub>' :

$$\bar{S}_{pu} = \frac{U_{pu}^2}{Z_{pu}} \quad (2.13)$$

**Remarque :** Nous définissons, de manière similaire à l'impédance (cfr. relation 2.12 et 2.4), l'admittance de base et l'admittance en pu :

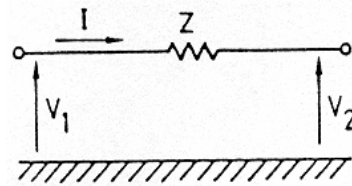
$$Y_B = \frac{S_B}{U_B^2} \quad [S] \quad (2.14)$$

$$\bar{Y}_{pu} = \frac{\bar{Y}}{Y_B} \quad (2.15)$$

La puissance complexe en pu devient, en fonction de l'admittance Y en pu :

$$\bar{S}_{pu} = \bar{Y}_{pu} \cdot U_{pu}^2 \quad (2.16)$$

### 2.1.4.Chute de tension



**Figure 2.5 : Variation de la tension dû au passage de courant à travers une ligne impédante**

Considérons une impédance de ligne 'Z' dans un système triphasé (figure 2.5).

En désignant par 'V' la tension phase/neutre (comme il est d'usage), nous avons directement (Kirchhoff) :

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 + \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad [V] \quad (2.17)$$

D'après les définitions introduites plus haut, il vient :

$$\bar{Z}_B \cdot \bar{I}_B = \bar{V}_B \quad [V] \quad (2.18)$$

Nous obtenons donc :

$$\bar{V}_{1pu} = \bar{V}_{2pu} + \bar{Z}_{pu} \cdot \bar{I}_{pu} \quad (2.19)$$

### 2.1.5.Changement de base

Généralement, les valeurs d'impédances des générateurs et transformateurs fournies par les constructeurs sont donnée dans un système per unit dont les grandeurs de base correspondent aux tension et puissance nominales (par construction) de l'appareil.

Lors de nos calculs, il conviendra de ne faire référence qu'à un seul système per unit.

Le problème qui se pose alors est celui d'uniformiser les données, soit, de convertir les impédances et admittances - exprimées dans un système quelconque - dans le système lié aux grandeurs de base ( $S_B$  et  $V_B$ ) choisies pour le tronçon considéré.

Nous pouvons écrire, pour deux systèmes de base différents :

$$\bar{Z} = \bar{Z}_{pu1} \cdot \bar{Z}_{B1} = \bar{Z}_{pu2} \cdot \bar{Z}_{B2} \quad (2.20)$$

d'où :

$$\bar{Z}_{pu2} = \bar{Z}_{pu1} \cdot \frac{\bar{Z}_{B1}}{\bar{Z}_{B2}} = \bar{Z}_{pu1} \cdot \frac{U_{B1}^2 \cdot S_{B2}}{U_{B2}^2 \cdot S_{B1}} \quad (2.21)$$

Pour les admittances, nous obtenons une formule analogue :

$$\bar{Y}_{pu2} = \bar{Y}_{pu1} \cdot \frac{Y_{B1}}{Y_{B2}} = \bar{Y}_{pu1} \cdot \frac{U_{B2}^2 \cdot S_{B1}}{U_{B1}^2 \cdot S_{B2}} \quad (2.22)$$

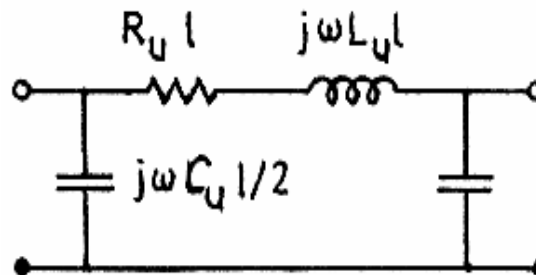
Si nous choisissons une puissance de base de 100 MVA et une tension de base correspondant à celle (nominale) du tronçon étudié, en se limitant aux niveaux de tension usuels HT et THT en Belgique, nous obtenons les valeurs représentées dans le tableau 2.1.

| $U_N$ [kV] | $I_B$ [A] | $Z_B$ [ $\Omega$ ] | $Y_B$ [ $\mu S$ ] |
|------------|-----------|--------------------|-------------------|
| 70         | 825       | 49                 | 20408             |
| 150        | 385       | 225                | 4444              |
| 220        | 262       | 484                | 2066              |
| 380        | 152       | 1444               | 693               |

**Tableau 2.1 : Valeurs typiques des grandeurs de base associées à  $S_B = 100$  MVA et  $U_B = U_N$  kV**

## 2.2. Modélisation des lignes

Le modèle mathématique d'une ligne aérienne ou souterraine peut, pour des longueurs de lignes pas trop élevées ( $l \leq 100$  km) et à la fréquence du réseau, être représenté sous la forme d'un schéma 'π' (figure 2.6). Ce schéma en 'π' possède une impédance longitudinale comprenant la résistance linéique et la réactance linéique de la ligne et deux admittances transversales d'extrémité reprenant chacune la moitié de la susceptance totale. Ce schéma se met donc sous la forme :



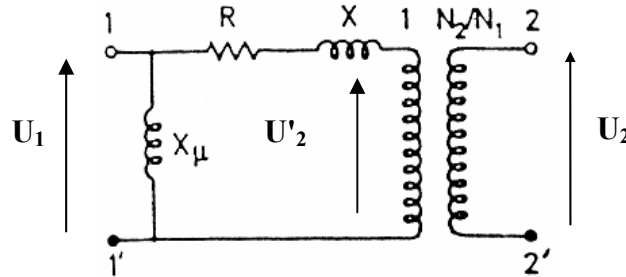
**Figure 2.6 : Modèle simplifié des lignes de transmission électriques**

où :

- $R_u$  est la résistance linéique de la ligne [ $\Omega/m$ ] ;
- $X = \omega.L_u$  est la réactance longitudinale linéique de la ligne [ $\Omega/m$ ] ;
- $Y/2 = \omega.C_u/2$  est l'admittance transversale linéique [ $\mu S/m$ ] ;
- $L$  est la longueur de la ligne [m].

## 2.3. Modélisation des transformateurs

Soit un transformateur monophasé possédant  $N_1$  et  $N_2$  spires respectivement au primaire et au secondaire ( $n = N_1 / N_2$ ). En transposant la branche magnétisante en tête du circuit, son schéma équivalent peut se représenter comme ci-dessous :



**Figure 2.7 : Modèle du transformateur**

- $R$  étant la résistance des enroulements primaires et secondaires :

$$R = R_1 + n^2 \cdot R_2 \quad [\Omega] \quad (2.23)$$

- $X$  étant la réactance de fuite du transformateur :

$$X = X_{f1} + n^2 \cdot X_{f2} \quad [\Omega] \quad (2.24)$$

- $X_\mu$  étant la réactance magnétisante :

$$X_\mu = n \cdot X_M \quad [\Omega] \quad (2.25)$$

L'impédance caractérisant le transformateur s'exprime, généralement, à travers la tension de court-circuit ( $U_{cc}$ ) de ce dernier (en %).

' $U_{cc}$ ' représente le pourcentage de la tension nominale à appliquer à un des enroulements pour qu'il passe un courant nominal dans l'autre enroulement, lorsque celui-ci est court-circuité. Cette tension correspond à l'impédance de fuite lorsque sa valeur est donnée dans le système per unit lié aux grandeurs nominales de l'appareil !

Dans le système pu, à partir du modèle de la figure 2.7, la tension de court-circuit se déduit par : «  $U_{cc,pu} = Z_{cc,pu} \cdot I_{N,pu}$  », avec  $I_{N,pu} = 1$ , naturellement.  $Z_{cc,pu}$  représente l'impédance du transformateur ( $= R_{pu} + j \cdot X_{pu}$ ) au cours de cet essai.

Nous pouvons retenir les ordres de grandeurs suivants, valables pour des transformateurs de réseaux HT et THT :

$$R_{pu} = 0,01 \text{ pu} ; X_{pu} = 0,04 \text{ à } 0,18 \text{ pu} ; X_{\mu,pu} = 20 \text{ à } 50 \text{ pu} ; X/\omega R = 0,1 \text{ à } 0,2 \text{ s}$$

Ces valeurs sont données dans un système per unit prenant pour valeurs de base la puissance nominale et une des tensions nominales du transformateur.

En principe, il faut ajouter, en parallèle par rapport à la réactance magnétisante, une résistance tenant compte des pertes magnétiques négligées jusqu'ici. Notons toutefois que cette résistance, dite « résistance fer », possède une valeur très élevée et est souvent négligée.

### 2.3.1. Le transfo. idéal dans les calculs de réseau

Dans ce paragraphe, nous prendrons les grandeurs de base comme étant les grandeurs nominales du système.

Considérons une ligne électrique dont deux tronçons, « 1-1' » et « 2-2' », sont séparés par un transformateur tels que sur la figure 2.7.

Les équations du transformateur idéal permettent de ramener les grandeurs du réseau '2' à celles du réseau '1' de la manière qui suit :

$$\bar{U}'_2 = \frac{1}{n} \cdot \bar{U}_2 \quad (2.26)$$

$$\bar{I}'_2 = n \cdot \bar{I}_2 \quad (2.27)$$

Introduisons le système per unit en choisissant 'S<sub>B1</sub>' et 'U<sub>B1</sub>' comme puissance et tension de base caractéristique du réseau '1'. Les grandeurs de base de ce réseau s'expriment par :

$$\bar{U}_{1pu} = \frac{1}{U_{B1}} \cdot \bar{U}_1 \quad (2.28)$$

$$\bar{I}_{1pu} = \frac{1}{I_{B1}} \cdot \bar{I}_1$$

Il en va de même pour les grandeurs du réseau '2' ramenées au niveau du premier :

$$\bar{U}'_{2pu} = \frac{1}{U_{B1}} \cdot \bar{U}'_2 = \frac{1}{n \cdot U_{B1}} \cdot \bar{U}_2 \quad (2.29)$$

$$\bar{I}'_{2pu} = \frac{1}{I_{B1}} \cdot \bar{I}'_2 = \frac{n}{I_{B1}} \cdot \bar{I}_2$$

Nous définissons, à présent, la tension de base du réseau '2' comme suit :

$$U_{B2} = n \cdot U_{B1} \quad (2.30)$$

Cela revient à choisir une valeur de tension de base différente pour chaque tronçon (séparé des autres par un ou plusieurs transformateurs) et dont la valeur est déterminé par le choix initial sur le premier tronçon étudié.

Or, nous avons : S<sub>B1</sub> = 3.I<sub>B1</sub>.V<sub>B1</sub> ; S<sub>B2</sub> = 3.I<sub>B2</sub>.V<sub>B2</sub>. En choisissant « S<sub>B1</sub> = S<sub>B2</sub> = S<sub>B</sub> », avec la relation 2.30, il vient :

$$I_{B2} = \frac{1}{n} \cdot I_{B1} \quad (2.31)$$

Nous obtenons finalement les relations fondamentales suivantes :

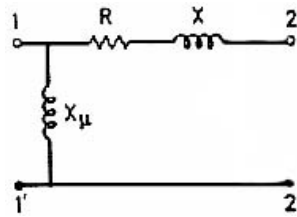
$$\bar{U}'_{2pu} = \frac{1}{U_{B2}} \cdot \bar{U}_2 = \bar{U}_{2pu} \quad (2.32)$$

$$\bar{I}'_{2pu} = \frac{1}{I_{B2}} \cdot \bar{I}_2 = \bar{I}_{2pu}$$

***Dans un système exprimé en per unit il apparaît donc qu'il convient de choisir les valeurs de base telles que :***

- ***le rapport de transformation, 'n', soit aussi le rapport des tensions de base des deux réseaux (U<sub>B2</sub> = n.U<sub>B1</sub>) ;***
- ***les puissances de base soient de même valeur (S<sub>B1</sub> = S<sub>B2</sub>).***

En effet, dans ce cas, les transformateurs idéaux seront rendus invisibles : «  $I_{2pu} = I'_{2pu}$  » ; «  $U_{2pu} = U'_{2pu}$  » et pourront se modéliser de la manière représentée à la figure 2.8 (grandeurs en pu !).



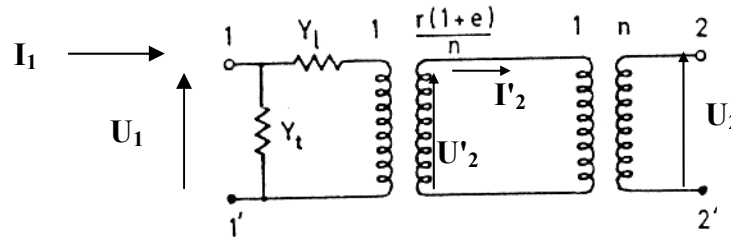
**Figure 2.8 : Modèle du transformateur en système per unit**

Si, en plus, nous tenons compte du fait que  $R \ll X \ll X_{\mu}$ , Ce transformateur, en système per unit, se réduit à une simple inductance.

### 2.3.2. Insertion d'un transfo dans un système per unit

Nous considérons, ici, le cas où les tensions de base ne sont pas les tensions nominales.

Reprenons le schéma de base en introduisant le rapport 'n' des tensions de base ( $n = U_{B2}/U_{B1}$ ) et le rapport 'r' des tensions nominales ( $r = U_{N2}/U_{N1}$ ) :



**Figure 2.9 : Modèle du transformateur à rapport de transformation variable**

Le paramètre 'e' est introduit pour modéliser la possibilité de modifier le rapport de transformation dans certaines gammes de valeurs. Le rapport de transformation total s'écrit, en « pu » :

$$\xi = \frac{(1+e) \cdot r}{n} \quad (2.33)$$

Nous obtenons deux relations suivantes :

$$\bar{I}_{1pu} = (Y_{lpu} + Y_{tpu}) \cdot \bar{U}_{1pu} - \frac{1}{\xi} \cdot Y_{lpu} \cdot \bar{U}'_{2pu} \quad (2.34)$$

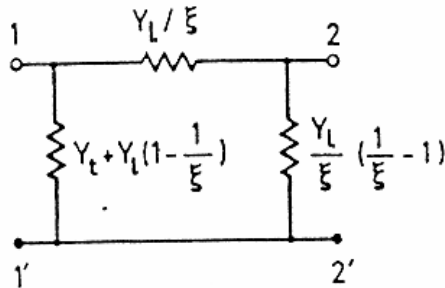
$$\bar{I}'_{2pu} = \frac{1}{\xi} \cdot Y_{lpu} \cdot \bar{U}_{1pu} - \frac{1}{\xi^2} \cdot Y_{lpu} \cdot \bar{U}'_{2pu} \quad (2.35)$$

Les admittances s'obtiennent facilement par les règles du changement de base :

$$Y_{pu} = Y_{puN1} \cdot \frac{U_{B1}^2 \cdot S_N}{U_{N1}^2 \cdot S_B} \quad (2.36)$$

### 2.3.3. Schéma équivalent

Quel que soit le système de référence utilisé, les équations en « per unit » suggèrent immédiatement l'utilisation d'un schéma équivalent en 'π'. En effet, en laissant de côté l'indice 'pu', nous obtenons, à partir des relations (2.31) et (2.32), le schéma équivalent de la figure 2.10 :



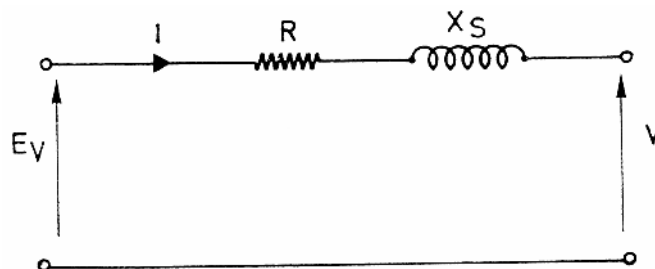
**Figure 2.10 : Schéma équivalent du transformateur à rapport variable**

D'un point de vue pratique, nous pouvons conclure que les transformateurs, les lignes et les câbles peuvent être modélisés par un schéma équivalent en 'π'. Dans le cas des lignes et des câbles, le quadripôle ainsi formé est symétrique. Ceci n'est pas le cas pour les transformateurs.

## 2.4. Modélisation des machines synchrones

Du point de vue des réseaux d'énergie, la machine synchrone ou 'alternateur', est un convertisseur électromécanique qui, à partir de l'énergie mécanique fournie par un moteur, renvoie dans le réseau de l'énergie électrique sous forme triphasée.

Les puissances ainsi mises en jeu varient considérablement : depuis quelques MW pour un alternateur d'une petite centrale, jusqu'à 1300 MW pour un groupe de production d'une centrale nucléaire. Le schéma équivalent d'une phase de la machine synchrone est :



**Figure 2.11 : Modèle simplifié de la machine synchrone**

«  $E_V$  » est la tension induite aux bornes du rotor ;  
 «  $R$  » est la résistance d'un enroulement statorique ;  
 «  $X_S$  » est la réactance synchrone. Son ordre de grandeur est de 2 pu dans la base qui correspond aux paramètres nominaux de la machine.

L'équation permettant de modéliser le comportement de la machine synchrone est :

$$\bar{U} = \bar{E}_v - (R + jX_s) \cdot \bar{I} \quad (2.37)$$

Les valeurs de R et Xs dépendent du régime considéré :

Xs (pu) possède une valeur :  
- nominale ~1 à 2 ;  
- transitoire ~ 0,10 à 0,5 ;  
- sub-transitoire ~ 0,01 à 0,05.

Pour un calcul de répartition de charge (Load Flow), on considère la valeur nominale.  
Pour un calcul simplifié de court-circuit, on considère la valeur transitoire ou sub transitoire.

Remarque :      *Des modèles plus complets existent, bien entendu !*

## 2.5. Exercice résolu

### 2.5.1. Enoncé.

Un générateur de 100 MVA,  $X_S = 100\%$ , de tension nominale 18kV est relié par un transformateur élévateur (18/70) de 50 MVA et de tension de court-circuit de 10 %, à une ligne triphasée 70 kV de 25 km ( $R = 0.2 \Omega/\text{km}$ ,  $X = 0,4 \Omega/\text{km}$ ,  $Y = 3\mu\text{S}/\text{km}$ ). Au bout de la ligne, une charge est branchée derrière un transformateur abaisseur (70/16,5) de 40 MVA, tension de court-circuit 15 %.

Nous avons relevé une tension de 15 kV aux bornes de la charge qui est inductive et soutire une puissance de 25 MVA avec un facteur de puissance de 0,8.

Nous demandons :

- Tracer le schéma unifilaire correspondant à ce circuit ;
- Pour  $S_B = 100 \text{ MVA}$ , choisissez les autres grandeurs de base et calculez le schéma en utilisant le système Per Unit.
- Que vaut (en grandeur réelle) la tension aux bornes du générateur ainsi que la f.e.m. interne ?
- Sur un schéma résumé, reprendre les valeurs de U, I, P et Q chaque fois qu'ils peuvent être calculés. Vérifier votre bilan en chaque nœud.

### 2.5.2. Résolution de l'Exercice pu.

A. Données :

- **Générateur (G) :**  
 $S_{B,G} = 100 \text{ MVA}$  ;  
 $X_{S,G} = 100 \%$  ;  
 $U_{N,G} = 18 \text{ kV}^1$ .
- **Transformateur (T1) :**  
Rapport  $n_{T1} = 18/70$  ;  
 $S_{B,T1} = 50 \text{ MVA}$  ;  
 $X_{CC,T1} = 10 \%$ .
- **Ligne triphasée (L) :**  
 $U_L = 70 \text{ kV}$  ;  
Longueur 25 km ;

---

<sup>1</sup>  $U_N$  est la valeur nominale de la tension qu'il faut connaître pour déterminer la valeur  $X_{S,G}$  en pu. Ce n'est donc pas la valeur de la tension exacte aux bornes de la machine dans les conditions d'exploitation.

$$R = 0,2 \Omega/\text{km} ;$$

$$X = 0,4 \Omega/\text{km} ;$$

$$Y = 3 \mu\text{S}/\text{km}.$$

- **Transformateur (T2) :**  
 Rapport  $n_{T2} = 70/16,5$  ;  
 $S_{B,T2} = 40 \text{ MVA}$  ;  
 $X_{CC,T2} = 15 \%$ .
- **Charge :**  
 $U = 15 \text{ kV}$  ;  
 $S = 25 \text{ MVA}$  ;  
 $\cos \theta = 0,8$ .

### B. Choix des grandeurs de base :

Nous choisissons les grandeurs de base égales aux grandeurs nominales. La puissance de base,  $S_B$ , est fixée à 100 MVA. Les tensions de base sont choisies afin de respecter la relation  $U_{B2} = n.U_{B1}$  et d'obtenir ainsi un transformateur 'invisible'.

$U_{B1} = 18 \text{ kV}$  est la tension de base du côté gauche du transformateur T1 :

$$Z_{B1} = U_{B1}^2 / S_B = 3,24 \Omega ;$$

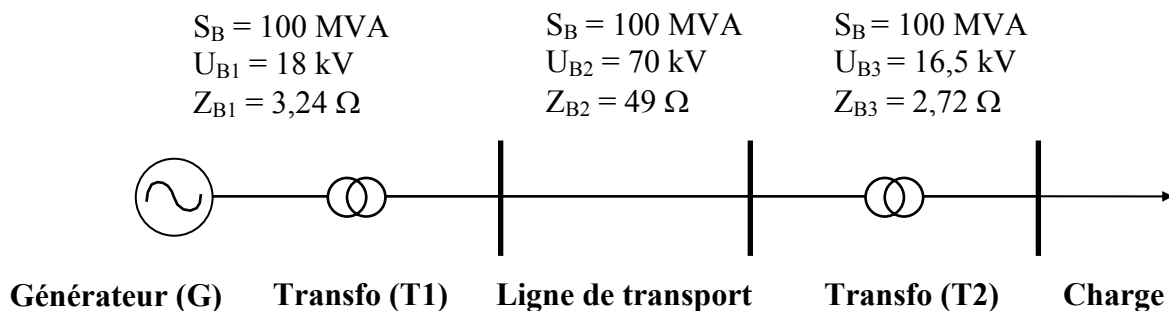
$U_{B2} = 70 \text{ kV}$  est la tension de base du côté droit de T1 et du côté gauche de T2 :

$$Z_{B2} = U_{B2}^2 / S_B = 49 \Omega ;$$

$U_{B3} = 16,5 \text{ kV}$  est la tension de base à gauche de T2 :

$$Z_{B3} = U_{B3}^2 / S_B = 2,72 \Omega.$$

### C. Schéma unifilaire :



### D. Grandeurs en pu et schéma en pu :

Toutes les grandeurs en 'per unit' doivent se référer à la puissance de base «  $S_B = 100 \text{ MVA}$  ».

- **Générateur (G) :**  
 $S_{N,G} = 100 / 100 = 1 \text{ pu}$   
 $X_{S,G} = 100 \%_{[100 \text{ MVA}]} \equiv 1 \text{ pu}$

▪ **Transformateur (T1) :**

Rapport  $n_{T1} = 18/70$  (= rapport des tensions de base) ;

$S_{N,T1} = 50 \text{ MVA} \equiv 50 / 100 = 0,5 \text{ pu}$  ;

$X_{CC,T1} = 10 \% ]_{50 \text{ MVA}} \equiv 0,1 \cdot 100 / 50 = 0,2 \text{ pu}$ .

▪ **Ligne triphasée (L) :**

Longueur 25 km ;

$R = 0,2 \Omega/\text{km} \equiv 0,2 \cdot 25 / 49 = 0,102 \text{ pu}$  ;

$X = 0,4 \Omega/\text{km} \equiv 0,4 \cdot 25 / 49 = 0,204 \text{ pu}$  ;

$Y = 3 \mu\text{S}/\text{km} \equiv 3 \cdot 10^{-6} \cdot 49 \cdot 25 = 3,68 \cdot 10^{-3} \text{ pu}$  ;  $\Rightarrow Y/2 = 1,84 \cdot 10^{-3} \text{ pu}$ .

▪ **Transformateur (T2) :**

Rapport  $n_{T2} = 70/16,5$  (= rapport des tensions de base) ;

$S_{N,T2} = 40 \text{ MVA} \equiv 40 / 100 = 0,4 \text{ pu}$  ;

$X_{CC,T2} = 15 \% ]_{40 \text{ MVA}} \equiv 0,15 \cdot 100 / 40 = 0,375 \text{ pu}$ .

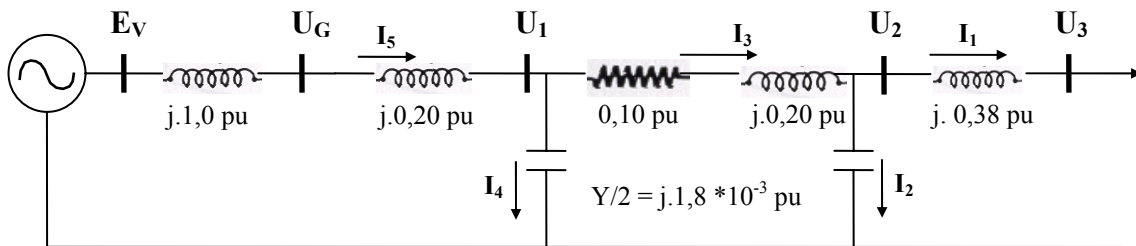
▪ **Charge :**

$U_3 = 15 / 16,5 = 0,91 \angle 0^\circ \text{ pu}$  ;

$S = 25 / 100 = 0,25 \text{ pu}$  ;

$\cos \theta = 0,8$ .

Son schéma équivalent est le suivant :



E. Etat du système :

Puissance active consommée par la charge:  $P_L = S \cdot \cos \delta = 0,25 \cdot 0,8 = 0,2 \text{ pu}$  ;

Puissance réactive consommée par la charge:  $Q_L = S \cdot \sin \delta = 0,25 \cdot 0,6 = 0,15 \text{ pu}$ .

Calcul du courant au niveau de la charge ( $I_1$ ) :

$$S = P_L + j \cdot Q_L = 0,2 + j \cdot 0,15 = U_3 \cdot I_1^* = 0,91 \angle 0^\circ \cdot I_1^* ;$$

$$I_1 = 0,220 - 0,165 j = 0,275 \text{ pu} \angle -37^\circ.$$

Calcul du courant dans la ligne ( $I_3$ ) :

$$U_2 = U_3 + I_1 \cdot j \cdot (0,375) = 0,971 + j \cdot 0,0825 = 0,974 \text{ pu} \angle 4,86^\circ ;$$

$$I_2 = U_2 \cdot j \cdot 1,84 \cdot 10^{-3} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ pu} \angle 94,9^\circ ;$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,274 \text{ pu} \angle -36,6^\circ.$$

Calcul du courant au niveau du générateur ( $I_5$ ) :

$$U_1 = I_3 \cdot (0,1 + j \cdot 0,2) + U_2 = 1,03 \text{ pu} \angle 6,13^\circ ;$$

$$I_4 = U_1 \cdot j \cdot 1,84 \cdot 10^{-3} = 1,90 \cdot 10^{-3} \text{ pu} \angle 96,1^\circ ;$$

$$I_5 = I_3 + I_4 = 0,273 \text{ pu} \angle -36,3^\circ.$$

Tension aux bornes et fem du générateur :

$$U_G = I_5 \cdot j \cdot 0,2 + U_1 = 1,07 \text{ pu } \angle 8,29^\circ ;$$

$$E_V = U_G + I_5 \cdot j = 1,28 \text{ pu } \angle 17,1^\circ.$$

La tension réelle aux bornes du générateur vaut :  $U_G \cdot U_{BI} = 19,2 \text{ kV } \angle 8,29^\circ.$

La fem réelle du générateur vaut :  $E_V \cdot U_{BI} = 23,0 \text{ kV } \angle 17,1^\circ.$

F. puissances transmises en chaque nœud :

Nœud  $E_V$  :

$$S_V = E_V \cdot I_5^* = 0,348 \text{ pu } \angle 53,3^\circ ;$$

$$= P_V + j \cdot Q_V ;$$

$$\Rightarrow P_V = 20,8 \text{ MW} ;$$

$$Q_V = 27,9 \text{ MVar}.$$

Nœud  $U_G$  :

$$S_G = U_G \cdot I_5^* = 0,292 \text{ pu } \angle 44,5^\circ ;$$

$$\Rightarrow P_G = 20,8 \text{ MW} ;$$

$$Q_G = 20,5 \text{ MVar}.$$

Nœud  $U_1$  :

$$S_1 = U_1 \cdot I_5^* = 0,281 \text{ pu } \angle 42,4^\circ ;$$

$$\Rightarrow P_1 = 20,8 \text{ MW} ;$$

$$Q_1 = 19,0 \text{ MVar}.$$

Nœud  $U_2$  :

$$S_2 = U_2 \cdot I_1^* = 0,268 \text{ pu } \angle 41,7^\circ ;$$

$$\Rightarrow P_2 = 20,0 \text{ MW} ;$$

$$Q_2 = 17,8 \text{ MVar}.$$

Au nœud  $U_3$  :

$$S_3 = U_3 \cdot I_1^* = 0,25 \text{ pu } \angle 36,9^\circ ;$$

$$\Rightarrow P_3 = 20,0 \text{ MW} ;$$

$$Q_3 = 15,0 \text{ MVar}.$$

G. Puissances dissipées :

Réactance synchrone :

$$Q_{Xs,G} = I_5^2 \cdot 1 = 0,0744 \text{ pu} ;$$

$$\Rightarrow Q_{Xs,G} = 7,44 \text{ MVar}.$$

Réactance de fuite de T1 :

$$Q_{T1} = I_5^2 \cdot 0,2 = 0,0149 \text{ pu} ;$$

$$\Rightarrow Q_{T1} = 1,49 \text{ MVar}.$$

Impédance de ligne :

• Impédance longitudinale :

$$S_L = I_3^2 \cdot (0,1 + j \cdot 0,2) = 1,68 \text{ pu } \angle 63,4^\circ ;$$

$$\Rightarrow P_L = 0,750 \text{ MW} ;$$

$$Q_L = 1,50 \text{ MVar}.$$

• Impédance transversale :

$$Q_{tr,g} = - I_4^2 \cdot (0,00184)^{-1} = - 0,00196 \text{ pu} ;$$

$$\Rightarrow Q_{tr,g} = - 0,196 \text{ MVar}.$$

$$Q_{tr,d} = - I_2^2 \cdot (0,00184)^{-1} = - 0,00174 \text{ pu ;}$$

$$\Rightarrow Q_{tr,d} = - 0,174 \text{ MVAr.}$$

Réactance de fuite de T2 :

$$Q_{T2} = I_1^2 \cdot j \cdot 0,375 = 0,0284 \text{ pu ;}$$

$$\Rightarrow Q_{T2} = 2,84 \text{ MVAr.}$$

Remarque : *Les pertes capacitives sont extrêmement faibles. Nous aurions pu les négliger depuis le début de la résolution.*

#### H. Bilan de puissances :

A partir du générateur, puissance actives :

$$P_V = P_G = P_1 = 20,8 \text{ MW ;}$$

$$P_2 = P_3 = P_V - P_L = 20,0 \text{ MW}$$

**OK.**

A partir du générateur, puissance réactives :

$$Q_V = 27,9 \text{ MVAr ;}$$

$$Q_G = Q_V - Q_{Xs,G} = 20,5 \text{ MVAr}$$

$$Q_1 = Q_G - Q_{T1} = 19,0 \text{ MVAr}$$

$$Q_2 = Q_1 - Q_L - Q_{tr,g} - Q_{tr,d} = 17,8 \text{ MVAr}$$

$$Q_3 = Q_2 - Q_{T2} = 15,0 \text{ MVAr}$$

**OK ;**

**OK ;**

**OK ;**

**OK.**

Autre formulation :  $S_{générée} = S_{consommée} + S_{pertes}$ .